Республикалық оқушылар олимпиадасының екінші (аудандық) кезеңі	Математика 2021-2022 оқу жылы / учебный год	Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников

Есеп нөмірі: / Номер задачи: 1

Парақ нөмірі: / Номер листа: 1

Парақтардың жалпы саны / Общее количество листов: 5

Қатысушының коды: / Код участника:

---

1 Задание

Решение

Дано

$16P(x^2) = (P(2x))^2$

$x \in R$

Коэффициенты многочлена — целые, n — целое число

Найти

Все, удовлетворяющие равенству, многочлен $P(x)$

Пусть $P(x) = x$

$x=1, \quad 16 \neq 4$

$x=2, \quad 64 \neq 16$

$x=3, \quad 144 \neq 36$

$x=4, \quad 256 \neq 64$

Заметим, что с увеличением значения x разница между „левой" и правой стороной равенства растёт, но отношение сторон остаётся равным 4

$\frac{16}{4} = \frac{64}{16} = \frac{144}{36} = \frac{256}{64} = \underline{\underline{4}}$

Значит необходимо найти многочлен, устраняющий ~~делитель~~ коэффициент между сторонами, поэтому перед x поставим коэффициент 4 $\Rightarrow P(x) = 4x$

$16P(x^2) = (P(2x))^2$

$16 \cdot 4x^2 = (4 \cdot 2x)^2$

$64x^2 = 64x^2$ (при $x \in R$ равенство выполняется)

Или иным решением, пусть $P(x) = nx$, тогда

$16nx^2 = n^2 4x^2$

$16n = 4n^2$

$4n^2 - 16n = 0$

$n(4n - 16) = 0$

$\left[\begin{array}{l} n = 0 \not\in \text{условию} \\ 4n - 16 = 0 \Rightarrow n = 4 \checkmark \end{array}\right.$

Также пусть $P(x) = nx + n$

Тогда $16(x^2 + n) = (2x + n)^2$

$16x^2 + 16n = 4x^2 + 4xn + n^2$

$16n - 4xn - n^2 = -12x^2$

$n(16 - 4x - n) = -12x^2$

$n = \dfrac{12x^2}{n + 4x + 16}$

Ответ: $P(x) = 4x$

$P(x) = x + \dfrac{12x^2}{n + 4x + 16}$, где n — целое число

Қатысушының шешімдерін толтыруға арналған өріс / Поле для заполнения решений участника   Парақ / Страница № 2

Республикалық оқушылар олимпиадасының екінші (аудандық) кезеңі	Математика 2021-2022 оқу жылы / учебный год	Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников

Есеп нөмірі: / Номер задачи: 2

Парақ нөмірі: / Номер листа: 2

Парақтардың жалпы саны / Общее количество листов: 3

Қатысушының коды: / Код участника:

2 Задание

Решение

Дано

$n \in N$

$a_n = \sqrt{1 + \underbrace{99...9}_{n \text{ девят.}}{}^2 + 0,\underbrace{99...9}_{n \text{ девят.}}{}^2}$

$S = a_1 + a_2 + ... + a_{2022}$

$\{S\}$ — дробная часть числа

Найти

$\{S\}$

Для вычисления $\{S\}$ необходимо найти закономерность в последовательности a_n.

$a_1 = \sqrt{1 + 9^2 + 0,9^2} = \sqrt{82 + 0,81} = \sqrt{82,81} = 9,1$

$a_2 = \sqrt{1 + 99^2 + 0,99^2} = \sqrt{9802 + 0,9801} = \sqrt{9802,9801} = 99,01$

Выходит, что при увеличении n целая часть увеличивается на 9 десятков, сотен, тысяч и т.д., а дробная часть (единица) уменьшается в 10 раз (после), таким образом „передвигаясь вправо". Соответственно можно понять, что $a_3 = 999,001$, $a_4 = 9999,0001$

Но т.к. целая часть нас не интересует, обозначим её за x при любых её значениях. Тогда $a_1 + a_2 = x,01 + x,1 = x,011$

Исходя из собранных выше наблюдений $S = a_1 + a_2 + ... a_{2022} =$

$= x,1 + x,01 + ... + x,\underbrace{00...0}_{2021}1 = x,\underbrace{111...1}_{2022}$ (т.к. номер каждого члена прогрессии показывает к-во знаков после запятой данного числа)

Тогда уберем целую часть x:

$\{S\} = 0,\underbrace{111...1}_{2022}$

Ответ: $\{S\} = 0,\underbrace{111...1}_{2022}$

Республикалық оқушылар олимпиадасының екінші (аудандық) кезеңі	Математика 2021-2022 оқу жылы / учебный год	Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников

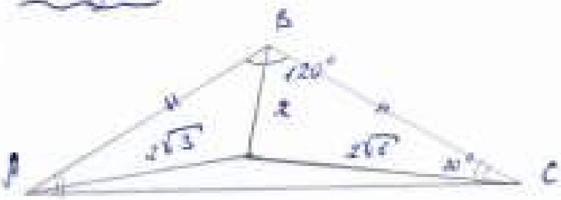
Есеп нөмірі: / Номер задачи: 3

Парақ нөмірі: / Номер листа: 3

Парақтардың жалпы саны / Общее количество листов: 3

Қатысушының коды: / Код участника:

3 Задание



Решение

$\angle B = 120°$

$AC < 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

$AC < 2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} < \sqrt{3}(1+\sqrt{2})h$

Дано

$\triangle ABC$ – равноб-ый

$AB = BC$

P – произвольная точ

$P \in_{\triangle} ABC$

$\angle BAC = 30°$

$AP = 2\sqrt{3}$

$BP = 2$

$CP = 2\sqrt{6}$

Найти

$S_{\triangle} ABC$

Республикалық оқушылар олимпиадасының екінші (аудандық) кезеңі	Математика 2021-2022 оқу жылы / учебный год	Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников

Есеп нөмірі: / Номер задачи:

Парақ нөмірі: / Номер листа: 1

Парақтардың жалпы саны / Общее количество листов:

Қатысушының коды: / Код участника:

1. Кез-келген $x \in R$ үшін төмендегі теңдік орындалады ме/е коэффициенттері бүтін болатындай барлық $P(x)$ мүшесін табыңыз

Берілгені:

$16P(x^2) = (P(2x))^2$.

Тексеру:

$16Px^2 = (P2x)^2$

$16Px^2 = P^2 \cdot 4x^2$

$16 \cdot 4x^2 = 4^2 \cdot 4x^2$

$64x^2 = 64x^2$

Шешуі:

$16P(x^2) = (P(2x))^2$

$16Px^2 = (P2x)^2$ - (жақшаны ашып, тексеміз)

$16P\cancel{x^2} = P^2 4\cancel{x^2}$ - (x^2 қысқарады)

$16P = P^2 4$ (пропорция)

$\frac{16}{4} = \frac{P^2}{P}$

$4 = P$

Ж/бы: $P(x) = 4$.

2. a_n тізбегі барлық натурал n үшін келесі формуламен берілген. $\{S\}$ санын есептеңіз, бұл жерде $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022}$.

$a_n = \sqrt{1 + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ тоғыз}}{}^2 + 0,\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ тоғыз}}{}^2}$

Республикалық оқушылар олимпиадасының екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников

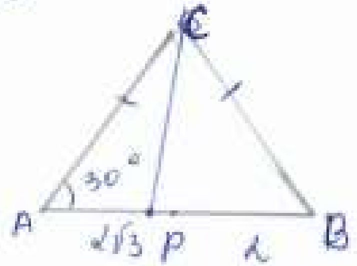
Есеп нөмірі: / Номер задачи:

Парақ нөмірі: / Номер листа:

Парақтардың жалпы саны / Общее количество листов:

Қатысушының коды: / Код участника:

3.



Бlі.

ΔABC - теңбүйірлі

$\angle BAC = 30°$

$AB = BC$

$AP = 2\sqrt3$

$BP = 2$

$CP = 2\sqrt6$

$S_{ABC} = ?$

Шешуі:

$B = \frac{2\sqrt3+2}{2} = \frac{2(\sqrt3+1)}{2}$

$\sqrt3+1$

$a\sqrt3 = \sqrt3+1$

$a = \frac{\sqrt3+1}{\sqrt3} = \frac{3+\sqrt3}{3}$

$BC = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt3}{3}\right)^2 + (\sqrt3+1)^2} = \frac{2\sqrt3+6}{6}$

$CB = AC = \frac{2\sqrt3+6}{3}$ $\qquad p = \frac{10\sqrt3+15}{6}$

$AB = 2\sqrt3+2$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{-\frac{\sqrt{-10}+30\sqrt3-30\sqrt3+45}{144}}$

$\sqrt{12+4\sqrt3+1} = \sqrt{-\frac{-15(13+4\sqrt3)}{144}} \cdot i = \frac{\sqrt{65\ 120\sqrt3}}{12} \cdot i =$

$\frac{195+60\sqrt3}{12} \cdot i$

Республикалық оқушылар олимпиадасының екінші (аудандық) кезеңі	Математика 2021-2022 оқу жылы / учебный год	Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников

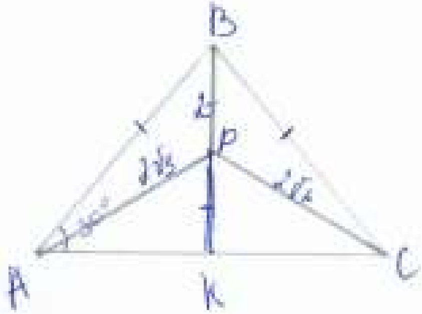
Есеп нөмірі: / Номер задачи:

Парақ нөмірі: / Номер листа:

Парақтардың жалпы саны / Общее количество листов:

Қатысушының коды: / Код участника:

3. Теңбүйірлі ABC $(AB=BC)$ үшбұрышының ішінен P нүктесі алынған. $\angle BAC=30^\circ$, $AP=2\sqrt{3}$, $BP=2$, $CP=2\sqrt{6}$ екені белгілі. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз



Берілгені:

$\triangle ABC$ - теңбүйірлі.

$\angle BAC=30^\circ$

$AB=BC$

$AP=2\sqrt{3}$

$BP=2$

$CP=2\sqrt{6}$

$S_{\triangle ABC}$ - ?

Шешуі:

1) $BK=h$ (биіктік).

$h=4$.

30°-қа қарсы жатқан катет гипотенузаның жартысына тең.

яғни, $\frac{AB}{2}=BK$.

$AB=2BK$.

$AB=8$.

$AB=BC=8$.

2) $AK^2=AB^2-BK^2$

$AK^2=64-16$

$AK^2=48$.

$AK=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

3) $AK=KC=4\sqrt{3}$ болса,

$AC=2\cdot4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

4) $P_{\text{тол}}=2a+b=2\cdot8+8\sqrt{3}=16+8\sqrt{3}$

5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $\cancel{S=\frac{AB\cdot BK}{2}=\frac{8\cdot4}{2}=16}$.

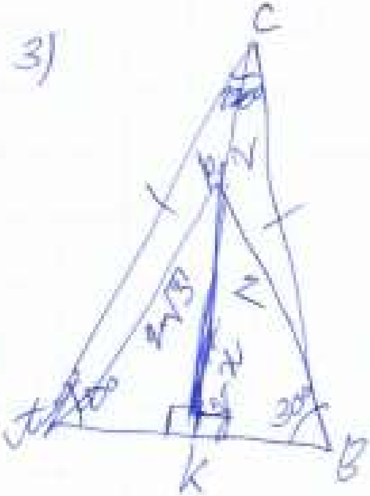
1) Так как многочлен $P(x)$ принимает целый коэффициент, то можно записать это в виде уравнения: $16x^4 = 4x^2$ $x \in \mathbb{R}$, методом подставления можно узнать, что подходят числа 2; 4; 6; учитывая закономерность делаем вывод что каждое $2n$ число удовлетворяет неравенство.

Ответ: $2n$

2) $a_n = \sqrt{1 + 99\ldots9^2 + 0{,}99\ldots9^2}$

Возьмем пример 1 $a_1 = \sqrt{1 + 9^2 + 0{,}9^2} \approx 9{,}1$ также и $a_2 = \sqrt{1 + 99^2 + 0{,}99^2} \approx 99{,}1$ и так продолжается вплоть до a_{2022}, число 2022 — четное, значит в сумме всех чисел дробная часть останется та же что и в примере, так как нам $\{S\}$, но целое число можно не брать в расчет, тогда дробная последовательность a_n при всех натуральных значениях n является 0,1

Ответ: 0,1

3) 

Дано: $\triangle ABC$

$\angle BAC = 30°$

$AP = 2\sqrt{3}$

$BP = 2$

$CP = 2\sqrt{6}$

CK — высота

Решение:

$AK = \sqrt{PK^2 - AP^2} = (2-x)^2 - (2\sqrt{3})^2 =$
$= 4 - 4x + x^2 - 12 = x^2 - 4x - 8$

$BK = \sqrt{PK^2 - BP^2} = (2-x)^2 - 2^2 =$
$= 4 - 4x + x^2 + 4 = x^2 - 4x$

$AB = x^2 - 4x + 8 + x^2 - 4x = 8$

$AC = CB = \sqrt{(4-2x) \cdot 8^2} = \sqrt{32 - 16x} =$
$= \sqrt{16} = 4$

$S_\triangle = 4^2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 124 \cdot \frac{1}{2} = 62$

Ответ: 62 см²