

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика
2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

1
1

Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

5

Қатысушының коды:
Код участника:

1 Задача

Решение

Дано

Пусть $P(x) = x$

$$x=1, \quad 16 \neq 4$$

$$x=2, \quad 64 \neq 16$$

$$x=3, \quad 144 \neq 36$$

$$x=4, \quad 256 \neq 64$$

Заметим, что с увеличением значения x разность между "левой" и правой сторонами равенства растёт, но отсюда стороны остаются равными 4

$$\frac{16}{4} = \frac{64}{16} = \frac{144}{36} = \frac{256}{64} = 4$$

$$16P(x^2) = (P(2x))^2$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Коэффициент
множимого - есть
 n - целое число

Найти

Значит необходимо найти множитель, устранивший дробь. Все, удовлетворяющее условию между сторонами, поэтому перед x поставим коэффициент 4 $\Rightarrow P(x) = 4x$

$$16P(x^2) = (P(2x))^2$$

$$16 \cdot 4x^2 = (4 \cdot 2x)^2$$

$$64x^2 = 64x^2 \quad (\text{при } x \in \mathbb{R} \text{ равенство выполняется})$$

Или иным решением, пусть $P(x) = nx$, тогда

Пусть пусть $P(x) = nx + n$

$$\text{Тогда } 16(x^2 + n) = (2x + n)^2$$

$$16x^2 + 16n = 4x^2 + 4xn + n^2$$

$$16n - 4xn - n^2 = -12x^2$$

$$n(16 - 4x - n) = -12x^2$$

$$n = \frac{12x^2}{n + 4x + 16}$$

$$16nx^2 = n^2 + 4x^2$$

$$16n = 4n^2$$

$$4n^2 - 16n = 0$$

$$n(4n - 16) = 0$$

$$\begin{cases} n = 0 & \text{не подходит} \\ 4n - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 4 \quad \checkmark$$

$$4n - 16 = 0 \Rightarrow n = 4 \quad \checkmark$$

Ответ: $P(x) = 4x$

$$P(x) = x + \frac{12x^2}{n + 4x + 16}, \quad \text{где } n - \text{целое число}$$

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьниковЕсеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

2

2

Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

3

Қатысушының коды:
Код участника:

2 Задача

Решение

Дано

Для вычисления $\{S\}$ необходимо найти закономерности в последовательности a_n .

$$a_1 = \sqrt{1 + 9^2 + 0,9^2} = \sqrt{82 + 0,81} = \sqrt{82,81} = 9,1$$

$$a_2 = \sqrt{1 + 99^2 + 0,99^2} = \sqrt{9802 + 0,9801} = \sqrt{9802,9801} = 99,01$$

Видно, что при увеличении n целая часть увеличивается на 9 десятков, сотен, тысяч и т.д., а дробная часть (единица) увеличивается в 10 раз (после), таким образом, предположим, что $a_3 = 999,001$, $a_4 = 9999,0001$.

По т.к. целая часть числа нас не интересует, обозначим ее за x при любых ее значениях. Тогда $a_1 + a_2 = x,91 + x,1 = x,11$.

Введем из собрания выше наблюдений $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} =$

$$= x,1 + x,01 + \dots + x, \underbrace{00\dots01}_{2021} = x, \underbrace{11\dots1}_{2022} \quad (\text{на номер каждого числа приходится по одному 1-во знаков после запятой данного числа})$$

Тогда уберем целую часть x :

$$\{S\} = 0, \underbrace{11\dots1}_{2022}$$

Ответ: $\{S\} = 0, \underbrace{11\dots1}_{2022}$

$$a_n = \sqrt{\underbrace{1 + 99\dots9^2}_{n \text{ девяток}} + \underbrace{0,99\dots9^2}_{n \text{ девяток}}}$$

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}$$

 $\{S\}$ - дробная часть числа
Найти
 $\{S\}$

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

3
3

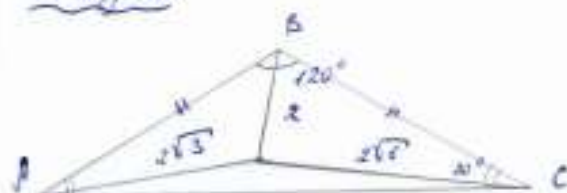
Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

3

Қатысушының коды:
Код участника:

--

3. Сұрақ



$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} < \sqrt{3} (1 + \sqrt{2}) h$$

Решение

$$\angle B = 120^\circ$$

$$AC < 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$AC < 2\sqrt{3} (1 + \sqrt{2}) \Rightarrow$$

Дано

$\triangle ABC$ — равноб.-ий
 $AB = BC$

P — произвольная точка

$P \in \triangle ABC$

$$\angle BAC = 30^\circ$$

$$AP = 2\sqrt{3}$$

$$BP = 2$$

$$CP = 2\sqrt{2}$$

Найти

$$S_{\triangle ABC}$$

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьниковЕсеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

1

Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:Қатысушының коды:
Код участника:

1. Кез-келген $x \in \mathbb{R}$ үшін төмендегі теңдік орындалады ме?
коэффициенттері бүтін баалайындай барлық $P(x)$ үшін.

Берілгені:

$$16P(x^2) = (P(2x))^2$$

Шешуі:

$$16P(x^2) = (P(2x))^2$$

$$16P(x^2) = (P(2x))^2 \quad (\text{маңшаны ашып,} \\ \text{кейінгіміз})$$

$$16P(x^2) = P^2(2x) \quad (x^2 \text{ қысқарады})$$

$$16P = P^2(2x) \quad (\text{пропорция})$$

$$\frac{16}{P} = \frac{P^2}{P}$$

$$4 = P$$

$$\text{Жауабы: } P(x) = 4$$

2. a_n тізбегі барлық натурал n үшін келесі формула-
мен берілген. $\{S\}$ санын есептеңіз, бұл жерде $S = a_1 + a_2 +$
 $+ \dots + a_{2022}$.

$$a_n = \sqrt{\underbrace{1 + 99 \cdot 9^k}_{n \text{ жолы}} + \underbrace{0,99 \cdot 9^k}_{n \text{ жолы}}}$$

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

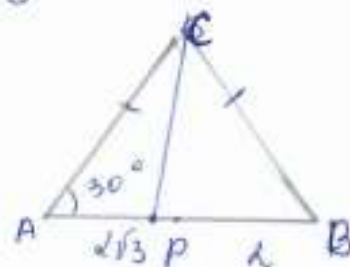
Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

--

Қатысушының коды:
Код участника:

--

3.



Білі.
 $\triangle ABC$ - теңдігірмі
 $\angle BPC = 30^\circ$
 $AB = BC$
 $AP = 2\sqrt{3}$
 $BP = 1$
 $CP = 2\sqrt{6}$
 $S_{ABC} = ?$

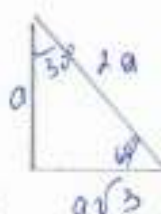
Шешуі:

$$BC = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$\sqrt{3} + 1$$

$$a\sqrt{3} = \sqrt{3} + 1$$

$$a = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$



$$BC = \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{6}$$

$$CB = AC = \frac{2\sqrt{3} + 6}{3}$$

$$p = \frac{10\sqrt{3} + 15}{6}$$

$$AB = 2\sqrt{3} + 2$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10 + 30\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 45}{144}}$$

$$\sqrt{12 + 4\sqrt{3} + 5} = \sqrt{\frac{-15(13 + 4\sqrt{3})}{144} \cdot i} = \sqrt{\frac{65 + 120\sqrt{3}}{12} \cdot i} =$$

$$\frac{195 + 60\sqrt{3}}{12} \cdot i$$

12

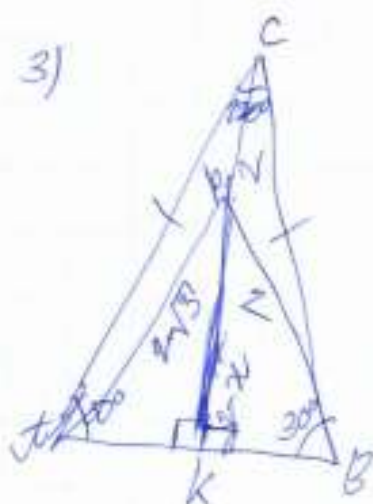
1) Так как многочлен $P(x)$ принимает целые коэффициенты, то можно записать это в виде уравнения: $16x^4 = 4x^2$
 $x \in \mathbb{R}$, методом подстановки можно узнать, что подходят числа 2; 4; 6; учитывая закономерность делаем вывод что каждое из чисел удовлетворяет неравенству.

Ответ: 2и

$$2) a_n = \sqrt{1 + 9 \cdot 9 \dots 9^2 + 0,99 \dots 9^2}$$

Возьмем пример: $a_1 = \sqrt{1 + 9^2 + 0,9^2} \approx 9,1$
 также $a_2 = \sqrt{1 + 9 \cdot 9^2 + 0,9 \cdot 9^2} \approx 99,1$ и так продолжается вплоть до a_{2022} , число 2022 - четное, значит в сумме всех чисел дробная часть останется все же что и в примере, так как нам $\{5\}$, то целое число можно не брать в расчет, тогда дробная последовательность a_n при всех натуральных значениях n является $0,1$

Ответ: 0,1



Дано: $\triangle ABC$

$$\angle B = 30^\circ$$

$$BP = 2\sqrt{3}$$

$$CP = 2$$

$$CK - \text{высота}$$

CK - высота

Решение:

$$BK = \sqrt{PK^2 - AP^2} = (2-x)^2 - (2\sqrt{3})^2 =$$

$$= 4 - 4x + x^2 - 12 = x^2 - 4x - 8$$

$$BK = \sqrt{PK^2 - BP^2} = (2-x)^2 - 2^2 =$$

$$= 4 - 4x + x^2 + 4 = x^2 - 4x$$

$$BK = x^2 - 4x + 8 \rightarrow x^2 - 4x = 8$$

$$BK = CB = \sqrt{(4-2x) \cdot 8} = \sqrt{2-16x} = \sqrt{6} = 4$$

$$S_{\Delta} = 4^2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 124 \cdot \frac{1}{2} = 62$$

Ответ: 62 см²